

Dieter Dippel

DIE LINEARE KONGRUENZ IN DER
HYPERBOLISCHEN EBENE

Frankfurt am Main 1963



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551903_0026

DIE LINEARE KONGRUENZ
IN DER
HYPERBOLISCHEN EBENE

Inauguraldissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johann Wolfgang Goethe - Universität
zu Frankfurt am Main

Vorgelegt von Dieter Dippel aus Nordhausen (Harz)

Frankfurt am Main, 1963



Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Frankfurt am Main.

Dekan: Prof. Dr. Th. Wieland

Referenten: Prof. Dr. R. Moufang
Prof. Dr. R. Baer

Mündliche Prüfung: 22./23. Juli 1963

Promotion: 29. Juli 1963

Inhaltsverzeichnis

Einführung		1
I	Die Axiome	6
	1. Der Zwischenbegriff	6
	2. Die Axiome	7
	3. Die Eigenschaften des Zwischenbegriffes	11
	4. Definiton der Kongruenz	13
II	Kongruente Abbildungen	14
	1. Hilfssätze über die Anordnung	14
	2. Pappusgeraden	17
	3. Ein Satz über kongruente Abbildungen	22
III	Die Eigenschaften des Kongruenzbegriffes	28
	1. Kongruente Abbildungen einer Geraden auf sich	28
	2. Hilfssätze über Pappusgeraden	29
	3. Die linearen Kongruenzaxiome von D. Hilbert	33
IV	Unabhängigkeit der Axiome und ihre Realisier- barkeit	36
	1. Unabhängigkeit	36
	2. Realisierbarkeit und Widerspruchsfreiheit	44
V	Die ebene Kongruenz	48

Einführung

Die Theorie der Kongruenz in der hyperbolischen Ebene, wie sie in der vorliegenden Arbeit für die lineare Kongruenz dargestellt wird, ist eine Fortsetzung der im Wesentlichen auf K. M e n g e r zurückgehenden Theorie der hyperbolischen Geometrie, in der alle Begriffe der hyperbolischen Ebene lediglich mit Hilfe von Aussagen über die Inzidenz von Punkten und Geraden definiert und mit einigen nur die Inzidenz betreffenden Postulaten die üblichen Eigenschaften dieser Begriffe bewiesen werden.

So gibt zum Beispiel H. F. D e B a g g i s in der Arbeit (1) ein System von sechs Axiomen an, das einem aus acht Forderungen bestehenden Axiomensystem von F. P. J e n k s (2) inhaltlich gleichwertig ist. De Baggis leitet aus seinem Axiomensystem mit einer von Jenks übernommenen Definition des "Zwischen"-Begriffes eine vollständige Theorie der linearen und ebenen Anordnung der hyperbolischen Ebene her.

Im Klein'schen Modell der hyperbolischen Ebene, also im Inneren einer Ellipse der reellen projektiven Ebene, wird die Kongruenz von Punktpaaren üblicherweise folgendermaßen definiert: zwei Punktpaare A, B und A', B' heißen kongruent, wenn es eine Kollineation der projektiven Ebene auf sich gibt, bei der die Ellipse festbleibt und A, B in A', B' , resp., oder in B', A' , resp., übergehen. Diese Kollineation induziert eine projektive Abbildung der Geraden $a = A + B$ auf die Gerade $a' = A' + B'$, bei der die Schnittpunkte von a mit der Ellipse in die Schnittpunkte von a' mit der Ellipse übergeführt werden.

K. Menger gibt in der Arbeit (3) eine Definition der Kongruenz von Punktepaaren an, für die er die Gerade b aus Fig. 1 nur mit Hilfe von Aussagen über die Inzidenz von Punkten und Geraden definiert.

Die vorliegende Arbeit geht auf (3) zurück, benutzt jedoch eine andere Definition des Kongruenzbegriffes, die eine Verallgemeinerung der Menger'schen Definition ist. Letztere kann nur für Punktepaare auf punktfremden Geraden ausgesprochen werden, für nicht punktfremde Geraden wird eine Hilfsgerade benötigt. Unsere Definition gilt für Punktepaare auf beliebigen Geraden.

Wir setzen überdies die Theorie der Anordnung voraus und übernehmen dazu das bereits erwähnte De Baggis'sche Axiomensystem, das wir für unsere Zwecke ändern und ergänzen.

Die Definition des "Zwischen"-Begriffes, die De Baggis benutzt, ist die folgende: von drei verschiedenen Punkten A, B, C wird B zwischen A und C liegend genannt, wenn zu jeder Geraden b durch B und zu jedem sich schneidenden Geradenpaar a, c durch A bzw. C wenigstens einer der Schnittpunkte von b mit a und b mit c existiert.

De Baggis beweist dann, daß drei Punkte, von denen einer zwischen den anderen liegt, kollinear sind.

Die Axiome von De Baggis:

B I : Zu zwei verschiedenen Punkten A und B gibt es stets genau eine Gerade, die A und B enthält.

B II : Jede Gerade enthält mindestens einen Punkt.

B III : Es gibt mindestens drei kollineare und drei nicht kollineare Punkte.

B IV : Zu zwei sich schneidenden Geraden a und b und einem weder auf a noch auf b liegenden Punkt P gibt es stets eine Gerade P , die a schneidet, aber nicht b .

B V : Von drei verschiedenen kollinearen Punkten liegt stets mindestens einer zwischen den beiden anderen. ¹⁾

B VI : Durch einen nicht auf einer Geraden a liegenden Punkt gibt es stets zwei verschiedene Geraden, die a nicht treffen.

Das erste Kapitel der vorliegenden Arbeit enthält unser Axiomensystem, den Nachweis, daß die Axiome B I bis B VI daraus folgen, einige Ergebnisse der De Baggis'schen Arbeit und unsere Definition der Kongruenz.

Unser siebtes Axiom verlangt, daß es zu zwei Geraden a, b mit den Punkten $A \in a, B \in b$ stets mindestens zwei kongruente Abbildungen von a auf b gibt, bei denen A in B übergeführt wird. Dabei wird eine kongruente Abbildung von a auf b als eine Folge von Perspektivitäten erklärt, die die ganze Gerade a auf die ganze Gerade b abbilden (siehe Definition 5) .

¹⁾ Die De Baggis'sche Formulierung dieses Axioms: Wenn es zu drei Punkten A, B, C durch je zwei von ihnen zwei sich schneidende Geraden gibt, die von einer durch den dritten Punkt gehenden Geraden nicht getroffen werden, sind A, B, C nicht kollinear.

Im zweiten Kapitel beweisen wir nun, daß es höchstens, mit dem vorstehend erwähnten Axiom also genau, zwei solcher Abbildungen gibt.

Das dritte Kapitel enthält den Nachweis, daß aus unseren Axiomen die von D. Hilbert in (4) angegebenen Axiome für die lineare Kongruenz folgen, daß also unser Kongruenzbegriff die üblichen Eigenschaften besitzt.

Eine Klasse von Modellen, in denen unser Axiomensystem erfüllt ist, wird im vierten Kapitel angegeben.

Damit zeigen wir gleichzeitig die Widerspruchsfreiheit des Systems. Die Unabhängigkeit wird - ebenfalls im vierten Kapitel - dadurch bewiesen, daß zu jedem Axiom ein Modell angegeben wird, in dem alle übrigen Axiome gelten, dieses eine dagegen nicht.

Im letzten Kapitel untersuchen wir, wie weit man mit unseren Hilfsmitteln die Winkelkongruenz definieren und ihre Eigenschaften herleiten kann.

I DIE AXIOME

1. Der Zwischenbegriff

Punkte wollen wir stets mit großen, Geraden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Die Verbindungsgerade zweier Punkte A, B sei $A + B$, der Schnittpunkt der Geraden a und $b = A + B$ sei $a, b = a, (A + B)$.

Von De Baggis übernehmen wir folgende Definition des "Zwischen"-Begriffes:

Definition 1: von drei verschiedenen Punkten A, B, C wird B zwischen A und C liegend genannt, wenn zu jeder Geraden b durch B und zu jedem sich schneidenden Geradenpaar a, c durch A bzw. C wenigstens einer der Schnittpunkte b, a und b, c existiert.

Die Kollinearität dreier Punkte ist eine notwendige Voraussetzung dafür, daß einer der Punkte zwischen den beiden anderen liegt. Dieses Ergebnis der De Baggis'schen Arbeit sei hier schon angegeben.

Diese Definition ist symmetrisch bezüglich der Punkte A und C . Wenn der Punkt B zwischen den Punkten A und C liegt, wird dies durch ABC oder CBA ausgedrückt. Wenn die Gerade a die Gerade $b = A + B$ in einem zwischen A und B liegenden Punkt schneidet, wollen wir sagen, a schneidet $A + B$ zwischen A und B oder a trennt A und B . Wenn A und B nicht von a getrennt werden, sagen wir auch A und B liegen auf derselben Seite von a .

2. Die Axiome

Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Punkten und Geraden mit einer Inzidenzrelation und einer gemäß Definition 1 erklärten Zwischenbeziehung. Über die Punkte und Geraden von $\mathcal{M}$ machen wir die folgenden Voraussetzungen:

A I: Zu zwei verschiedenen Punkten A und B aus $\mathcal{M}$ gibt es stets genau eine Gerade aus $\mathcal{M}$, die A und B enthält.

A II: Jede Gerade aus $\mathcal{M}$ enthält mindestens einen Punkt.

A III: $\mathcal{M}$ enthält mindestens zwei Punkte.

Mit Definition 1 können wir den Begriff eines "konvexen, offenen Teilbereichs" einführen.

Definition 2: eine Punktmenge aus $\mathcal{M}$ heißt konvex, wenn sie mit zwei Punkten A, B jeden zwischen A und B liegenden Punkt enthält. Eine Punktmenge heißt offen, wenn sie mit zwei Punkten A, B stets einen Punkt C mit ABC enthält. Ein konvexer, offener Teilbereich aus $\mathcal{M}$ sei eine Punktmenge aus $\mathcal{M}$, die sowohl offen als auch konvex ist.

A IV: Sei $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ oder sei $\mathcal{L}$ ein beliebiger konvexer, offener Teilbereich mit $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$. Wenn a, b ein nicht geordnetes Geradenpaar aus $\mathcal{M}$ ist, dessen Schnittpunkt in $\mathcal{L}$ liegt, und wenn P ein Punkt aus $\mathcal{L}$ ist, der weder auf a noch auf b liegt, gibt es durch P stets eine Gerade aus $\mathcal{M}$, die - soweit sie in $\mathcal{L}$ verläuft - a trifft, aber nicht b. ²⁾

²⁾ Es genügt nicht, A IV für $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ zu fordern, da dann noch nicht die Gültigkeit von A IV für beliebige konvexe offene Teilbereiche $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ folgt. Ein Modell, in dem A IV für $\mathcal{L} = \mathcal{M}$, aber nicht für jeden Bereich $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ gilt, geben wir im ersten Abschnitt von Kapitel IV im Rahmen des Nachweises der Unabhängigkeit unseres Axiomensystems an.

A V : Von drei verschiedenen kollinearen Punkten aus $\mathcal{M}$ liegt stets mindestens einer zwischen den beiden anderen.

A VI : Durch einen nicht auf einer Geraden $a \in \mathcal{M}$ liegenden Punkt aus $\mathcal{M}$ gibt es stets zwei verschiedene Geraden aus $\mathcal{M}$, die a nicht treffen.

Definition 3 : es seien a und b zwei Geraden und Z ein Punkt weder auf a noch auf b . Wenn zu jedem Punkt $A \in a$ der Schnittpunkt $B = b. (A + Z)$ existiert, werde die Menge der Punkte $B = b. (A + Z)$ das perspektive Bild von a über Z auf b genannt und mit $\{a \xrightarrow{Z} b\}$ oder kurz mit P_b bezeichnet. Wenn dagegen nicht zu jedem $A \in a$ der Schnittpunkt $B = b. (A + Z)$ existiert, wird P_b nicht erklärt.

Durch die Bedingung $Z \notin a$ und $Z \notin b$ haben wir Entartungen ausgeschlossen. Lediglich der triviale Fall $a = b$ ist möglich, für den $P_b = a = b$ ist.

Aus der Definition von P_b ergibt sich eine eindeutige Abbildung aller Punkte von a auf die Punkte von P_b mittels der Zuordnung $A \longrightarrow B = b. (A + Z) \in P_b$ für $A \in a$ und $B \longrightarrow A = a. (B + Z) \in a$ für $B \in P_b$. Diese Abbildung ist eine Perspektivität, wir wollen sie mit $a \xrightarrow{Z} P_b$ abkürzen.

Analog zu Definition 3 können wir - wenn c eine dritte Gerade und Z' ein Punkt weder auf b noch auf c ist - das perspektive Bild $P_c = \{P_b \xrightarrow{Z'} c\}$ erklären.

Definition 4 : wenn es zu zwei (nicht notwendig verschiedenen) Geraden a, b eine Folge von Geraden $a = c_0, c_1, \dots, c_n = b$ und eine Folge von Punkten $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ gibt, von denen Z_i weder auf c_{i-1} noch auf c_i liegt ($i = 1, 2, \dots, n$) und wenn die perspektiven Bilder

$$P_{c,1} = \{a \xrightarrow{Z_1} c_1\} \quad , \quad P_{c,i} = \{P_{c,i-1} \xrightarrow{Z_i} c_i\}$$

$$\text{für } i = 2, 3, \dots, n-1 \quad \text{und} \quad P_{b,n} = \{P_{c,n-1} \xrightarrow{Z_n} b\}$$

existieren, wollen wir $P_{b,n}$ als das durch die Perspektivitäten

$$a \xrightarrow{Z_1} P_{c,1} \quad , \quad P_{c,1} \xrightarrow{Z_2} P_{c,2} \dots , \quad P_{c,n-1} \xrightarrow{Z_n} P_{b,n}$$

erzeugte projektive Bild von a auf b nennen.

Diese Perspektivitäten vermitteln eine eindeutige Abbildung aller Punkte von a auf die Punkte $\overset{\text{von}}{P_{b,n}}$.

Definition 5 : seien wie in Definition 4 die Geraden a, b, c_i und die Punkte Z_i gegeben und existiere das durch die c_i und Z_i erzeugte projektive Bild $P_{b,n}$ von a auf b .

Wenn darüberhinaus $P_{b,n} = b$ ist, wird die eindeutige Abbildung von a auf b , die durch die Perspektivitäten

$$a \xrightarrow{Z_1} c_1 \xrightarrow{Z_2} \dots \xrightarrow{Z_n} b$$

vermittelt wird, eine kongruente Abbildung von a auf b genannt.

Wenn k eine kongruente Abbildung einer Geraden a auf eine Gerade b ist, die den Punkt $A \in a$ in den Punkt $B \in b$ überführt, kürzen wir dies ab durch: k ist eine kongruente Abbildung mit $(a, A) \longrightarrow (b, B)$.

Offensichtlich ist auch die identische Abbildung einer Geraden auf sich eine kongruente Abbildung.

Mit Hilfe dieser kongruenten Abbildung wollen wir später die Kongruenz von Punktepaaren definieren.

Die zwei letzten Axiome lauten:

A VII : Wenn es zwei verschiedene Punkte gibt, existieren zu zwei (nicht notwendig verschiedenen) Geraden a, a' und zwei Punkten $A \in a, A' \in a'$ stets mindestens zwei kongruente Abbildungen mit $(a, A) \longrightarrow (a', A')$.

A VIII : Der Satz von Pappus gilt in folgender Form:
seien A_1, A_2, A_3 drei Punkte einer Geraden a und
 B_1, B_2, B_3 drei Punkte einer Geraden b ;

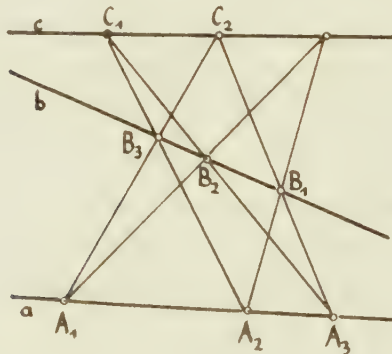


Fig. 2

wenn die Schnittpunkte $C_1 = (A_2 + B_3) \cdot (A_3 + B_2)$ und $C_2 = (A_1 + B_3) \cdot (A_3 + B_1)$ existieren und wenn einer der Schnittpunkte von $A_1 + B_2$ bzw. $A_2 + B_1$ mit $c = C_1 + C_2$ existiert, dann existiert auch der andere, und beide fallen zusammen. (Fig. 2).

Eine Menge $\mathcal{M}$, in der die Axiome A I bis A VIII gelten, sei als hyperbolische Ebene bezeichnet.

3. Die Eigenschaften des Zwischenbegriffes.

Als erstes wollen wir zeigen, daß die in der Einführung genannten Axiome von De Baggis aus unseren Axiomen folgen.

Satz 1: Die Axiome B I bis B VI von De Baggis folgen aus den Axiomen A I bis A VIII.

Wir sehen, daß B I mit A I, B II mit A II, B V mit A V und B VI mit A VI übereinstimmt. B IV folgt sofort aus A IV für $\mathcal{Z} = \mathcal{M}$. Es bleibt also lediglich zu zeigen, daß auch B III folgt, daß es also drei kollineare und drei nicht kollineare Punkte gibt. Letztere Aussage folgt sofort: wegen A III gibt es zwei Punkte, die wir mit A_1 und A_2 bezeichnen wollen. Sei $a = A_1 + A_2$.

Da es nach A VII kongruente Abbildungen von a auf sich gibt, existiert ein Punkt, der nicht auf a liegt. Auch die andere Behauptung ist leicht zu zeigen: sei b eine beliebige (nicht notwendig von a verschiedene) Gerade. Nach A II gibt es einen Punkt B_1 auf b und nach A VII existieren zwei kongruente Abbildungen k, k' mit $(a, A_1) \rightarrow (b, B_1)$.

Da k eineindeutig ist, ist $B_2 = k(A_2) \neq B_1$. Wenn a einen dritten Punkt A_3 enthält, ist $B_2 = k(A_3)$ auch von B_1 und B_2 verschieden, und die Behauptung ist bewiesen.

Wenn a keinen weiteren Punkt enthält, gibt es auch auf b nur die Punkte B_1 und B_2 , und es folgt $k'(A_2) = k(A_2) = B_2$, was aber ein Widerspruch zu A VII ist, da sich k und k' in wenigstens einem Punkt unterscheiden müssen.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Wir sehen also, daß sich die De Baggis'schen Axiome aus unserem Axiomensystem herleiten lassen und daß wir die Sätze der De Baggis'schen Arbeit benutzen dürfen. Wir übernehmen daraus die folgenden Ergebnisse, die wir ohne besonderen Hinweis häufig anwenden werden :

- a) Wenn ABC gilt, sind A , B und C kollinear und verschieden. ³⁾
- b) Von drei verschiedenen kollinearen Punkten liegt genau einer zwischen den beiden anderen. ⁴⁾
- c) Zu zwei verschiedenen Punkten A , C gibt es stets einen Punkt B mit ABC und einen Punkt D mit ACD . ⁵⁾
- d) Der "Zwischen"-Begriff ist transitiv, d. h. aus ABC und BCD folgt ABD und ACD . ⁶⁾
- e) Axiom von Pasch : A , B , C seien drei nicht kollineare Punkte. Jede Gerade, die A und B trennt, geht entweder durch C oder schneidet genau eine der Geraden $A + C$ und $B + C$ zwischen A und C bzw. zwischen B und C . ⁷⁾

Aus dem Axiom von Pasch folgt sofort, daß jede kongruente Abbildung anordnungstreu ist, d. h. wenn k eine kongruente Abbildung einer Geraden a auf eine Gerade b ist und A , B , C drei Punkte auf a mit ABC sind, folgt $A' B' C'$ für die Bildpunkte $A' = k(A)$, $B' = k(B)$, $C' = k(C)$.

-
- 3) (1) Seite 5
 - 4) (1) Seite 5
 - 5) (1) Seite 12
 - 6) (1) Seite 9
 - 7) (1) Seite 12

4. Definition der Kongruenz

Es folgt nun die Definition der Kongruenz von Punktepaaren.

Definition 6 : zwei (ungeordnete) Punktepaare A, A' und B, B' heißen kongruent, in Zeichen $AA' \sim BB'$, wenn es eine kongruente Abbildung von $a = A + A'$ auf $b = B + B'$ gibt, die A in B und A' in B' überführt, oder wenn es eine kongruente Abbildung von a auf b gibt, die A in B' und A' in B überführt.

Dabei ist zu beachten, daß - wie wir im Anschluß an Hilfssatz 1 zeigen werden - zwei Punktepaare A, A' und B, B' von denen B und B' wie in

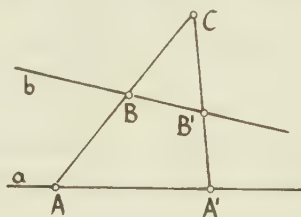


Fig. 3

Fig. 3 durch einfache Projektion von einem nicht auf a oder b liegenden Punkt C aus, d.h. durch $B = b \cdot (C + A)$ und $B' = b \cdot (C + A')$, aus A und A' hervorgehen, nicht kongruent sind.

Wir sehen, daß dieser Kongruenzbegriff symmetrisch, reflexiv und transitiv ist. Über die weiteren Eigenschaften können wir vorläufig noch keine Aussagen machen, da erst im nächsten Kapitel bewiesen wird, daß es zu zwei Geraden a, b mit den Punkten $A \in a, B \in b$ stets genau zwei kongruente Abbildungen mit $(a, A) \longrightarrow (b, B)$ gibt.

II KONGRUENTE ABBILDUNGEN

Das Ziel dieses Kapitels ist der Beweis, daß es zu zwei Geraden a, a' mit den Punkten $A \in a, A' \in a'$ stets höchstens zwei - und wegen A VII also genau zwei - kongruente Abbildungen mit $(a, A) \longrightarrow (a', A')$ gibt. Dazu wollen wir zunächst abkürzende Bezeichnungen einführen und einige Hilfssätze beweisen, die die Anordnung von Punkten und Geraden betreffen.

1. Hilfssätze über die Anordnung von Punkten und Geraden.

In den Beweisen der in diesem Abschnitt vorkommenden Hilfssätze 1 und 2 werden lediglich die De Baggis'schen Ergebnisse benutzt, die sich - wie wir im ersten Kapitel gezeigt haben - aus A I bis A VII herleiten lassen.

Definition 7 : die Gerade b liegt zwischen der Geraden a und dem Punkt C - oder kurz: es gilt abC -, wenn a und b punktfremd sind und es zwei Punkte $A \in a$ und $B \in b$ mit ABC gibt.

Hilfssatz 1 : wenn die Gerade b zwischen der Geraden a und dem Punkt C liegt, existiert zu jedem Punkt A_1 auf a der Schnittpunkt $B_1 = b \cdot (A_1 + C)$. Dagegen gibt es einen Punkt B' auf b , dessen Verbindungsgerade mit C nicht von a getroffen wird.

Die erste Behauptung folgt aus dem Axiom von Pasch, angewandt auf das Dreieck A, A_1, C und die Gerade b . (Fig. 4)

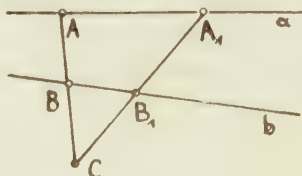


Fig. 4

Zum Beweis der zweiten Behauptung seien $A \in a$ und $B \in b$ zwei Punkte mit ABC . Nach A VI gibt es durch B eine Gerade $b' \neq b$, die a nicht trifft. (Fig. 5)

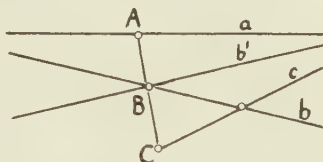


Fig. 5

Auch b' liegt zwischen a und C . Nach A IV gibt es durch C eine Gerade c , die b schneidet, aber nicht b' . Auch a wird von c nicht geschnitten, da sonst auch der Schnittpunkt c, b' existierte nach der bereits bewiesenen ersten Behauptung dieses Hilfssatzes.

$B' = c, b$ ist der gesuchte Punkt.

Wir sehen, daß aus Hilfssatz 1 die Richtigkeit der im Anschluß an Definition 6 gemachten Bemerkung folgt. Es existiert zwar für abC das perspektive Bild $P_b = \{a \xrightarrow{C} b\}$ (Bezeichnung wie in Fig. 3), aber sicher ist $P_b \neq b$.

Definition 8: der Punkt C liegt zwischen den Geraden a und b - oder kurz: es gilt aCb -, wenn a und b punktfremd sind, C weder auf a noch auf b liegt und weder abC noch baC gilt. Wenn es dann eine Gerade durch C gibt, die a in A und b in B schneidet, gilt sicher ACB .

Hilfssatz 2: zu einer Geraden a und einem nicht auf a liegenden Punkt Z gibt es stets eine Gerade b mit aZb so, daß zu jedem Punkt $A \in a$ der Schnittpunkt $B = b, (A + Z)$ existiert, daß also das perspektive Bild $P_b = \{a \xrightarrow{Z} b\}$ existiert.

Beweis: nach A VI gibt es durch Z zwei Geraden c_1 und c_2 , die a nicht schneiden (Fig. 6).

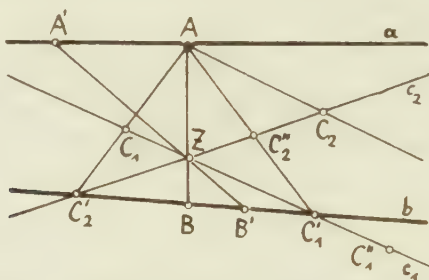


Fig. 6

Zu einem beliebigen Punkt A auf a sichert uns A IV die Existenz eines Punktes C_2 auf c_2 , für den c_1 und $A + C_2$ punktfremd sind. Sei C'_2 ein Punkt mit $C_2ZC'_2$. Wegen des Axioms von Pasch, angewandt auf das Dreieck A, C_2, C'_2 , schneiden sich c_1 und $A + C'_2$ in einem Punkt C_1 mit $AC_1C'_2$. Ebenfalls wegen des Axioms von Pasch existiert zu einem Punkt C'_1 mit C'_1ZC_1 , der Schnittpunkt $C'_1C'_2 = c_2 \cdot (A + C'_1)$, und es ist $C'_1C'_2A$. Von der Geraden $b = C'_1 + C'_2$ behaupten wir nun, daß sie die verlangten Eigenschaften besitzt. Nach dem Axiom von Pasch (Dreieck C_1, C'_1, C'_2 und Gerade $A + Z$) existiert der Schnittpunkt $B = b \cdot (A + Z)$ und liegt zwischen C'_1 und C'_2 , analog (Dreieck A, B, C'_2 und Gerade c_1) folgt AZB . Schließlich sind a und b punktfremd; denn wenn der Schnittpunkt $C = a \cdot b$ existierte, ergäbe das Axiom von Pasch entgegen den Voraussetzungen über c_1 und c_2 für $CC'_1C'_2$ einen Schnittpunkt von a und c_2 (Dreieck C, B, A und Gerade c_2), für $C'_1CC'_2$ einen Schnittpunkt von a mit c_1 oder c_2 (Dreieck C'_1, C'_2, Z und Gerade a), für $C'_1C'_2C$ einen Schnittpunkt von a mit c_2 (Dreieck A, B, C und Gerade c_1), für $C = C'_1$ oder $C = C'_2$ wäre $C = a \cdot c_1$ bzw. $C = a \cdot c_2$.

Somit liegt Z zwischen a und b . Für jeden Punkt A' auf a folgt die Existenz des Schnittpunktes $B' = b \cdot (A' + Z)$ aus dem Axiom von Pasch (Dreieck C'_1, C'_2, C_1 und Gerade $A' + Z$), woraus die zweite Behauptung von Hilfssatz 2 folgt.

Man überlegt sich leicht, daß b nicht die einzige Gerade mit den in obigem Hilfssatz angegebenen Eigenschaften ist: denn wenn C'_1 ein Punkt mit $C'_1 C'_1 Z$ ist und b' eine Gerade durch C'_1 , die c_2 trifft, aber nicht b , besitzt b' dieselben Eigenschaften wie b , d. h. es gilt aZb' und das perspektive Bild $P_{b'} = \left\{ a \xrightarrow{Z} b' \right\}$ existiert; überdies gilt abb' .

Definition 9: die Gerade b liegt zwischen den Geraden a und c - oder kurz: es gilt abc -, wenn a, b, c paarweise punktfremd sind und es drei Punkte $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ mit ABC gibt.

Dann liegt b auch zwischen a und jedem Punkt von c , wie aus dem Axiom von Pasch leicht folgt.

2. Pappusgeraden.

In der Einleitung wiesen wir darauf hin, daß man im Klein'schen Modell einer hyperbolischen Ebene kongruente Punktepaare mit Hilfe des Satzes von Pappus konstruieren kann.

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Pappusgeraden⁸⁾ ein (Definition 10), der es gestattet, analog zu der in der Einführung erwähnten Konstruktionsmethode kongruente Punktepaare zu erzeugen.

⁸⁾ Menger (3) benutzt bei der Definition der Kongruenz von Punktepaaren sogenannte "a-Geraden", die unseren Pappusgeraden entsprechen, aber anders definiert sind.

Zunächst jedoch ein Hilfssatz:

Hilfssatz 3: seien a und b zwei punktfremde Geraden und P_b ein durch irgendwelche Perspektivitäten erzeugtes projektives Bild einer dritten Geraden auf b . Wenn es zu zwei Punkten $A \in a$ und $B \in P_b$ eine Gerade c so gibt, daß die perspektiven Bilder

$$P_c = \{a \xrightarrow{B} c\} \text{ und } P'_c = \{P_b \xrightarrow{A} c\}$$

existieren und gleich sind, gilt entweder acP_b (Fig. 7)

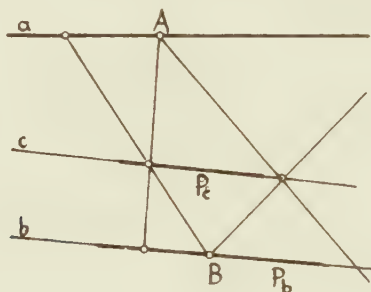


Fig. 7

oder $aP_b c$ (Fig. 8) ⁹⁾

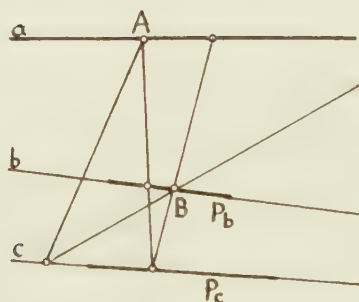


Fig. 8

⁹⁾ $aP_b c$ bedeute, daß alle Punkte von P_b zwischen a und c liegen, acP_b bedeute, daß c zwischen a und allen Punkten von P_b liegt.

Beweis: sei c eine Gerade mit $\{a \xrightarrow{B} c\} = \{P_b \xrightarrow{A} c\}$.
Wir sehen sofort, daß a und c punktfremd sind; denn anderenfalls
gäbe es wegen A IV eine Gerade durch B , die a trifft, aber nicht c .

Zum Beweis, daß auch c und P_b punktfremd sind, nehmen wir im
Gegensatz zur Behauptung an, daß der Schnittpunkt $B' = c \cdot P_b$ existiert.
Wegen Definition 3 liegt B nicht auf c , daher ist weder $b = c$ noch
 $B' = B$ möglich. Da a und c punktfremd sind, wie oben gezeigt
wurde, und da B weder auf a noch auf c liegt, sind die Fälle
 aBc , acB und caB möglich.

Im Fall caB gäbe es nach Hilfssatz 1 eine Gerade durch B , die a
trifft, aber nicht c , wir können diesen Fall daher ausschließen.

Im Fall aBc (Fig. 9) wäre für einen beliebigen Punkt $A' \in a$

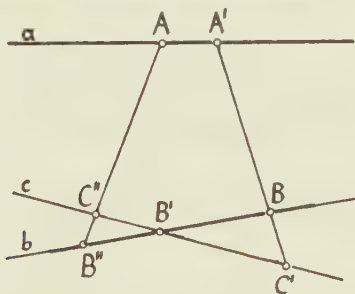


Fig. 9

und für $C' = c \cdot (A' + B)$ stets $A'BC'$, also hätten wir abP_c .
Dagegen wäre sicher nicht abP_c , wie sich aus dem Folgenden er-
gibt: sei B'' ein Punkt von P_b mit $B''B'A$ und sei $C'' = c \cdot (B'' + A)$. Nach der Definition von P_c gehört C'' zu P_c , und
wegen des Axioms von Pasch (Dreieck A, B, B'' und Gerade c)
wäre $AC''B''$, sodaß also b nicht zwischen a und C'' und damit
nicht zwischen a und P_c läge.

Damit erhielten wir einen Widerspruch zu $P_c = P'_c$. Im Fall acB läßt sich auf ähnliche Weise ein Widerspruch konstruieren. Damit ist gezeigt, daß c und P_b punktfremd sind. Die Behauptung von Hilfssatz 3 folgt nun unmittelbar daraus, daß caB und somit caP_b unmöglich ist.

Definition 10: seien a und b zwei punktfremde Geraden und P_b ein durch irgendwelche Perspektivitäten erzeugtes projektives Bild einer dritten Geraden auf b . Wenn es zu zwei Punkten $A \in a$ und $B \in P_b$ eine Gerade c mit acP_b so gibt, daß die perspektiven Bilder $P_c = \{a \xrightarrow{B} c\}$ und $P'_c = \{P_b \xrightarrow{A} c\}$ existieren und gleich sind, wird c eine Pappusgerade zu $A \in a$ und $B \in P_b$ genannt (Fig. 10).

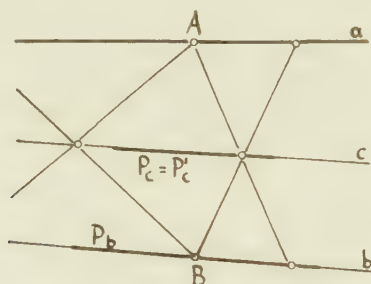


Fig. 10

Im nächsten Hilfssatz wird die Eindeutigkeit dieser Pappusgeraden bewiesen.

Hilfssatz 4: seien a und b zwei punktfremde Geraden und P_b ein durch irgendwelche Perspektivitäten erzeugtes projektives Bild einer dritten Geraden auf b . Zu zwei Punkten $A \in a$ und $B \in P_b$ gibt es stets höchstens eine Pappusgerade c .

Beweis : sei c eine Pappusgerade, also eine Gerade mit $P_c = P'_c$ und aP_b . Sei $\mathcal{L}$ der Teilbereich der hyperbolischen Ebene, der aus allen von A verschiedenen Punkten X besteht, für die der Schnittpunkt $Y = P_b \cdot (A + X)$ existiert und für die AXY oder $X = Y$ oder AYX gilt.

Da P_b offen ist, folgt sofort, daß $\mathcal{L}$ offen ist, die Konvexität folgt direkt aus dem Axiom von Pasch. Alle Punkte von P_c gehören zu $\mathcal{L}$. Sei nun c' eine zweite Pappusgerade mit - bei analogen Bezeichnungen zu oben - $P_{c'} = P'_{c'}$.

Dann liegt auch c' zwischen a und P_b , und auch $P_{c'}$ gehört zu $\mathcal{L}$.

Wenn sich c und c' in $\mathcal{L}$ schneiden, gibt es nach A IV durch den zu $\mathcal{L}$ gehörenden Punkt B eine Gerade, die - soweit sie in $\mathcal{L}$ verläuft - P_c trifft, aber nicht $P_{c'}$, die also a trifft, aber nicht $P_{c'}$.

Wenn sich c und c' nicht in $\mathcal{L}$ schneiden, sei $C = c \cdot (A + B)$ und $C' = c' \cdot (A + B)$. C und C' gehören zu $\mathcal{L}$. Ohne

Beschränkung der Allgemeinheit können wir $CC'B$ annehmen (Fig. 11).

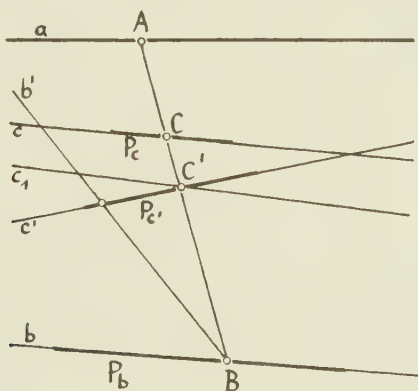


Fig. 11

Nach A VI gibt es durch C' eine Gerade $c_1 \neq c'$, die c nicht trifft. Nun existiert nach A IV eine Gerade b' durch B , die - soweit sie in $\mathcal{X}$ verläuft - c' trifft, aber nicht c_1 , der Punkt b', c' gehört also zu $P_{c'}$, dagegen gehört der Schnittpunkt b', c - wenn er existiert - sicher nicht zu $P_{c'}$, woraus folgt, daß sich a und b' nicht schneiden.

Damit ist bewiesen, daß c' keine Pappusgerade ist.

3. Ein Satz über kongruente Abbildungen.

In diesem Abschnitt beweisen wir, daß es zu zwei Geraden a, a' mit den Punkten $A \in a, A' \in a'$ höchstens zwei kongruente Abbildungen mit $(a, A) \longrightarrow (a', A')$ gibt (Satz 2).

Der folgende Hilfssatz ist ein Spezialfall davon.

Hilfssatz 5: seien a und a' zwei punktfremde Geraden und P_a ein durch irgendwelche Perspektivitäten erzeugtes Bild einer dritten Geraden auf a . Seien ferner A, B zwei Punkte aus P_a und A' ein Punkt auf a' . Dann gibt es höchstens eine durch eine Folge von Perspektivitäten vermittelte Abbildung von P_a auf a' , bei der A in A' und B in einen Punkt B' übergeht, der von B nicht durch $A + A'$ getrennt wird.

Beweis: wir beweisen zunächst, daß es eine Pappusgerade zu $A \in P_a$ und $A' \in a'$ gibt, und dann, daß die Existenz von zwei Abbildungen einen Widerspruch zu Hilfssatz 4 ergäbe.

Sei k eine aus Perspektivitäten zusammengesetzte Abbildung mit $(P_a, A) \longrightarrow (a', A')$, die B in einen Punkt $B' \in a'$ überführt, der von B nicht durch die Gerade $A + A'$ getrennt wird (Fig. 12).

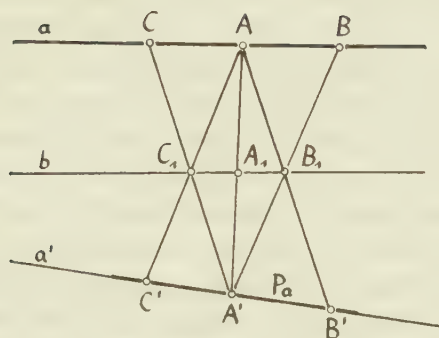


Fig. 12

Wenn C ein Punkt aus P_a mit CAB ist, gilt wegen der Anordnungsstreuung der Perspektivitäten $C'A'B'$ für $C' = k(C)$.

Aus dieser Lage der Punkte folgt die Existenz der Schnittpunkte $B_1 = (A + B') \cdot (B + A')$ und $C_1 = (A + C') \cdot (C + A')$.

Denn wenn z. B. der Punkt C_1 nicht existierte, ergäbe sich durch Anwendung des Axioms von Pasch zuerst auf das Dreieck A, B', C' und dann auf das Dreieck A, B, B' , daß die Gerade $A' + C$ entweder A und B oder B und B' trennte oder durch B ginge.

Im ersten Fall wäre ACB , im zweiten ABC und im dritten $B = C$; diese drei Möglichkeiten haben wir durch die Voraussetzung CAB ausgeschlossen. Also existiert der Schnittpunkt C_1 und liegt überdies zwischen A und C' und zwischen C und A' . Analog folgt, daß B_1 existiert und AB_1B' und BB_1A' gilt.

Die Verbindungsgerade von B_1 und C_1 sei b . Sei ferner $A_1 = b \cdot (A + A')$. Die Existenz von A_1 ergibt sich durch Anwendung des Axioms von Pasch auf das Dreieck A, A', C' . Die Hintereinanderausführung der Perspektivitäten $(C, A, B) \xrightarrow{A'} (C_1, A_1, B_1)$ und $(C_1, A_1, B_1) \xrightarrow{A} (C', A', B')$ ergibt eine Abbildung der Punkte C, A, B auf die Punkte C', A', B' , resp., die wir mit k^0 bezeichnen wollen.

Da sowohl k als auch k^0 Folgen von Perspektivitäten sind und $k(C) = k^0(C) = C'$, sowie $k(A) = k^0(A) = A'$ und $k(B) = k^0(B) = B'$ ist, folgt aus A VIII, daß für jeden Punkt $D \in P_a$ der durch $D_1 = b.(A' + D)$ und $D' = a'.(A + D_1)$ definierte Bildpunkt $D' = k^0(D) \in a'$ existiert und daß $k^0(D) = k(D)$ ist. Umgekehrt existiert, da k seine Abbildung von P_a auf die ganze Gerade a' ist, zu jedem Punkt $E' \in a'$ ein Punkt $E \in P_a$ mit $k^0(E) = k(E) = E'$. Somit sind wir sicher, daß die perspektiven Bilder $P_b = \{P_a \xrightarrow{A'} b\}$ und $P'_b = \{a' \xrightarrow{A} b\}$ existieren und gleich sind. Denn wäre $P_b \neq P'_b$, so gäbe es einen Punkt $P_1 \in b$, der nur zu einer der beiden Punktmengen, etwa zu P_b , gehört. Dann existierte zwar $P = P_a.(A' + P_1)$, aber nicht $P' = a'.(A + P_1)$ und P besäße keinen Bildpunkt $k(P)$. Der Fall, daß P_1 nur zu P'_b gehört, läßt sich analog ad absurdum führen. Wie oben gezeigt wurde, liegt C_1 zwischen A und C' , womit wegen Hilfssatz 3 die Gerade b zwischen P_a und a' liegt; b ist daher eine Pappusgerade zu $A \in P_a$ und $A' \in a'$. Wenn es nun eine zweite Abbildung k_1 mit $(P_a, A) \longrightarrow (a', A')$ gäbe, die ebenfalls den Punkt B in einen Punkt $B'_1 \in a'$ überführt, der von B nicht durch die Gerade $A + A'$ getrennt wird, könnten wir wie oben eine Pappusgerade b_1 konstruieren. Wegen Hilfssatz 4 ist $b_1 = b$, also $k_1 = k^0$ und somit $k_1 = k$, womit Hilfssatz 5 bewiesen ist.

Satz 2: zu zwei Geraden a, a' und zwei Punkten $A \in a$ und $A' \in a'$ gibt es stets genau zwei kongruente Abbildungen von a auf a' , die A in A' überführen. Sie bilden jeden von A verschiedenen Punkt $X \in a$ so in zwei Punkte $X', X'' \in a'$ ab, daß $X'A'X''$ gilt.

Beweis : die Existenz von mindestens zwei kongruenten Abbildungen mit $(a, A) \longrightarrow (a', A')$ folgt aus A VII.

Beim Beweis von "höchstens zwei" unterscheiden wir drei Fälle, von denen die ersten zwei mit Hilfssatz 5 bewiesen werden, der dritte Fall läßt sich auf den zweiten zurückführen.

1. Fall : a und a' sind punktfremd. Sei B ein von A verschiedener Punkt auf a . Dann folgt unmittelbar aus Hilfssatz 5, daß es höchstens eine kongruente Abbildung k mit $(a, A) \longrightarrow (a', A')$ gibt, die B in einen Punkt $B' \in a'$ überführt, der von B nicht durch $A + A'$ getrennt wird. Für den ersten Fall bleibt zu zeigen, daß es höchstens eine kongruente Abbildung k' mit $(a, A) \longrightarrow (a', A')$ gibt, die den Punkt B in einen Punkt $B'' \in a'$ überführt, der von B durch die Gerade $A + A'$ getrennt wird. Sei k' eine solche Abbildung (k' existiert wegen A VII und Hilfssatz 5), sei C ein Punkt auf a mit CAB und sei $C'' = k'(C)$. Wie bei Hilfssatz 5 gilt $C''A'B''$. Bei dieser Lage der Punkte kann die Existenz der Geraden b aus Hilfssatz 5 nicht bewiesen werden, darum muß ein anderer Weg beschritten werden : sei Z ein Punkt mit $AA'Z$. Nach Hilfssatz 2 gibt es eine Gerade c mit $a'Zc$ so, daß das perspektive Bild $P_c = \{a' \xrightarrow{Z} c\}$ existiert (Fig. 13).

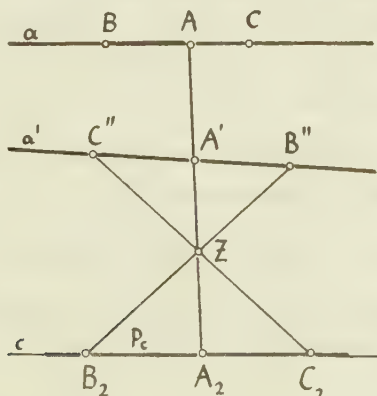


Fig. 13

Insbesondere existieren also die Punkte $B_2 = c. (Z + B'')$, $A_2 = c. (Z + A')$ und $C_2 = c. (Z + C'')$. Durch k' und nachfolgende Projektion $a' \xrightarrow{Z} P_c$ erhalten wir eine eindeutige Abbildung k_2 von a auf P_c ¹⁰⁾. Da B und B'' durch $A + A'$ getrennt werden und da B'' und B_2 durch $A' + A_2 = A + A'$ getrennt werden ¹¹⁾, liegen B und B_2 auf derselben Seite von $A + A_2$. Aus Hilfssatz 5 folgt nun wie oben, daß es höchstens eine aus endlich vielen Perspektivitäten zusammengesetzte Abbildung von a auf P_c gibt, die A in A_2 und B in einen Punkt überführt, der von B nicht durch $A + A_2$ getrennt wird. Daraus wiederum ergibt sich, daß es auch höchstens eine kongruente Abbildung mit $(a, A) \rightarrow (a', A')$ gibt, die den Punkt B in einen Punkt überführt, der von B durch $A + A'$ getrennt wird. Somit ist die erste Behauptung von Satz 2 für den ersten Fall, daß a und a' punktfremd sind, bewiesen.

2. Fall: $a = a'$: nach Satz 1 gibt es drei nicht kollineare Punkte, also existiert ein nicht auf a liegender Punkt A_1 , und nach A VI gibt es durch A_1 eine Gerade a_1 , die a nicht trifft. Nach Axiom A VII gibt es eine ¹²⁾ kongruente Abbildung k_1 mit (a_1, A_1) (a, A) . Gäbe es nun mehr als zwei kongruente Abbildungen mit $(a, A) \rightarrow (a, A')$ etwa k, k' und k'' , erhielte man durch Hintereinanderausführen von k_1 und k , von k_1 und k' und von k_1 und k'' mehr als zwei kongruente Abbildungen mit $(a_1, A_1) \rightarrow (a, A')$.

¹⁰⁾ k_2 ist keine kongruente Abbildung, da nicht a auf c , sondern nur a auf P_c abgebildet wird.

¹¹⁾ Da Z zwischen a' und c liegt, gilt $B''ZB_2$ nach Hilfssatz 1.

¹²⁾ Nach A VII gibt es sogar zwei solcher Abbildungen, aber wir benötigen hier nur eine.

Dies ist aber nicht möglich, wie wir beim ersten Fall gesehen haben.

3. Fall: a und a' haben genau einen Punkt gemeinsam. Gäbe es mehr als zwei kongruente Abbildungen mit $(a, A) \longrightarrow (a', A')$, etwa k_1, k_2 und k_3 , erhielte man durch Hintereinanderausführen von k_1 und k_2^{-1} , von k_1 und k_3^{-1} und durch die identische Abbildung mehr als zwei kongruente Abbildungen mit $(a, A) \longrightarrow (a, A)$, was oben ad absurdum geführt wurde. Damit ist allgemein gezeigt, daß es höchstens zwei kongruente Abbildungen mit $(a, A) \longrightarrow (a', A')$ gibt.

Der Beweis der zweiten Behauptung von Satz 2 ist im obigen Beweis enthalten; wenn sie falsch wäre, erhielte man (im dritten Fall durch Zurückführen auf Fall 2 und 1, wie es oben geschehen ist) einen Widerspruch zu Hilfssatz 5.

Somit ist der Beweis von Satz 2 beendet.

III DIE EIGENSCHAFTEN DES KONGRUENZBEGRIFFES

In diesem Kapitel wird bewiesen, daß unser Kongruenzbegriff die üblichen Eigenschaften hat. Reflexivität, Symmetrie und Transitivität folgten direkt aus der Definition der Kongruenz; als nächstes zeigen wir, daß es zu zwei verschiedenen Punkten A, A' und einer (nicht notwendig von $A + A'$ verschiedenen) Geraden b mit einem Punkt $B \in b$ stets genau zwei Punkte $B', B'' \in b$ mit $B'BB''$ gibt, für die $AA' = BB'$ und $AA' = BB''$ gilt.

1. Kongruente Abbildungen einer Geraden auf sich

Nun wissen wir zwar, daß es zu zwei Geraden a, a' mit den Punkten $A, B \in a$ und $A' \in a'$ genau zwei kongruente Abbildungen mit $(a, A) \rightarrow (a', A')$ gibt, bei denen B in B' bzw. B'' so übergeht, daß $B'A'B''$ gilt, aber wir können noch nicht sagen, ob die beiden kongruenten Abbildungen von a auf a' , die B in A' überführen, den Punkt A in B' bzw. B'' abbilden, ob es also auf b genau zwei Punkte B', B'' mit $B'A'B''$ gibt, für die $A'B' = AB$ und $A'B'' = AB$ ist. Dies folgt erst, wenn wir bewiesen haben, daß es zu zwei Punkten A, B stets eine kongruente Abbildung von $a = A + B$ auf sich gibt, die A und B vertauscht (Satz 4).

In einem Spezialfall können wir die Existenz einer solchen Abbildung schon jetzt zeigen: sei a eine Gerade und seien A, A' zwei beliebige Punkte auf a . Nach Satz 2 gibt es genau zwei kongruente Abbildungen k_1, k_2 von a auf sich, die A festlassen; die eine, etwa k_1 , ist die Identität, und die andere bildet A' in einen Punkt A'' mit $A'AA''$ ab.

Führen wir diese zweite Abbildung k_2 zweimal hintereinander aus, erhalten wir wieder eine kongruente Abbildung mit $(a, A) \longrightarrow (a, A)$, die wegen Satz 2 entweder gleich k_1 oder gleich k_2 ist. Der zweite Fall ist unmöglich, da dann bereits k_2 die Identität wäre; bleibt also der erste Fall, d. h. k_2 ist eine Involution und vertauscht somit A' und A'' .

Für den allgemeinen Fall beweisen wir im zweiten Abschnitt dieses Kapitels zunächst, daß es zu zwei punktfremden Geraden a, b und einem Punkt Z mit aZb , für die das perspektive Bild $P_b = \{ a \xrightarrow{Z} b \}$ existiert, und zu zwei Punkten $A \in a$, $B \in P_b$ stets eine Pappusgerade gibt (Hilfssatz 6), dann mit einem weiteren Hilfssatz, daß jede dieser Pappusgeraden durch Z geht (Satz 3).

2. Hilfssätze über Pappusgeraden

Hilfssatz 6: seien a und b zwei punktfremde Geraden, Z ein Punkt zwischen a und b , und es existiere das perspektive Bild $P_b = \{ a \xrightarrow{Z} b \}$. Zu zwei beliebigen Punkten $A \in a$ und $B \in P_b$ gibt es dann stets eine Pappusgerade c .

Beweis: sei $A_1 = a \cdot (Z + B)$ und A' ein von A verschiedener Punkt auf a (Fig. 14).

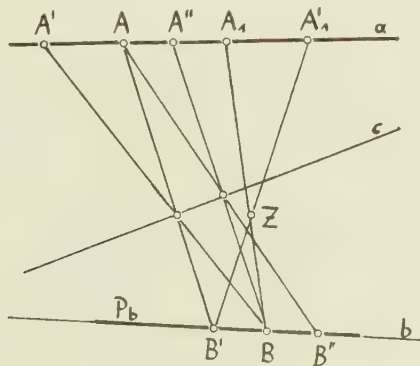


Fig. 14

Nach Satz 2 gibt es genau zwei kongruente Abbildungen mit $(a, A) \rightarrow (a, A_1)$, von denen eine den Punkt A' so in einen Punkt A'_1 abbildet, daß A' und $B' = b$. $(Z + A'_1) \in P_b$ nicht von $A + B$ getrennt werden. Diese Abbildungen seien k . Durch Hintereinanderausführen von k und der Perspektivität $a \xrightarrow{Z} P_b$ erhalten wir eine aus endlich vielen Perspektivitäten zusammengesetzte Abbildung von a auf P_b . Wegen der Anordnungstreue der Perspektivitäten bildet diese Abbildung einen Punkt A'' mit $A'AA''$ in einen Punkt $B'' \in P_b$ mit $B'BB''$ ab. Wie beim Beweis von Hilfssatz 5 können wir die Existenz der Schnittpunkte $C'' = (A + B')$, $(A' + B)$ und $C' = (A + B'')$, $(A'' + B)$ nachweisen und zeigen, daß für die Gerade $c = C' + C''$ die behaupteten perspektiven Bilder existieren und gleich sind und das c zwischen a und P_b liegt.

Hilfssatz 7: seien a, b zwei Geraden und Z ein Punkt mit aZb so, daß das perspektive Bild $P_b = \{a \xrightarrow{Z} b\}$ existiert. Wenn A ein Punkt auf a und $B = P_b \cdot (A + Z)$ ist, gibt es durch jeden zwischen Z und B liegenden Punkt eine Gerade, die P_b trifft, aber nicht a , und durch jeden zwischen Z und A liegenden Punkt eine Gerade, die a trifft, aber nicht P_b .

Beweis: sei Z' ein beliebiger Punkt mit $BZ'Z$ (Fig. 15).

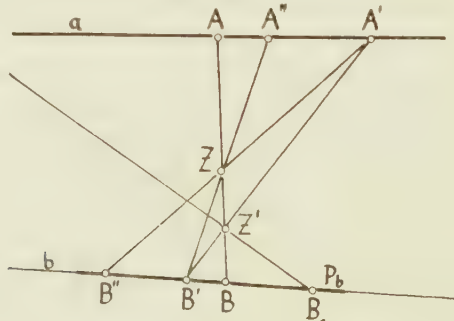


Fig. 15

Zu jedem Punkt $A' \in a$ existiert der Schnittpunkt $B' = b \cdot (A' + Z')$ und gehört überdies zu P_b ; denn wenn $B'' = P_b \cdot (A' + Z)$ ist (die Existenz von B'' folgt aus der Definition von P_b), ergibt sich aus dem Axiom von Pasch, angewandt auf das Dreieck Z, B'', B , daß B' existiert und zwischen B'' und B liegt und daher zu P_b gehört. Somit existiert das perspektive Bild $P'_b = \left\{ a \xrightarrow{Z'} b \right\}$, und alle Punkte von P'_b gehören zu P_b . Wenn umgekehrt alle Punkte von P_b zu P'_b gehörten, wenn also $P_b = P'_b$ wäre, würden die Perspektivitäten $a \xrightarrow{Z'} P_b \xrightarrow{Z} a$ eine Abbildung von a auf sich vermitteln, die A festläßt und A' in einen Punkt A'' abbildet, für den wegen des Axioms von Pasch (Dreieck A, Z', A') $AA''A'$ gilt. Das ist aber ein Widerspruch zu Satz 2, da diese Abbildung nicht die identische Abbildung von a auf sich ist (denn wegen $Z \neq Z'$ ist $A'' \neq A'$) und daher wegen Satz 2 den Punkt A' in einen Punkt A'' mit $A''AA'$ abbilden müßte.

Also ist $P_b = P'_b$ nicht möglich, d. h. es gibt einen Punkt $B_1 \in P_b$, der nicht zu P'_b gehört. (Der andere Fall, daß es einen Punkt von P'_b gibt, der nicht zu P_b gehört, ist unmöglich, da wir bereits gezeigt haben, daß jeder Punkt von P'_b zu P_b gehört.)

Die Geraden $Z' + B_1$ und a sind somit punktfremd.

Analog können wir nachweisen, daß es durch jeden zwischen Z und A liegenden Punkt eine Gerade gibt, die a trifft, aber nicht P_b .

Damit ist Hilfssatz 7 bewiesen.

Satz 3: seien a, b zwei Geraden und Z ein Punkt mit aZb so, daß das perspektive Bild $P_b = \left\{ a \xrightarrow{Z} b \right\}$ existiert. Die zu beliebigen Punkten $A \in a$ und $B \in P_b$ gehörende Pappusgerade c geht dann durch Z .

Beweis: nehmen wir im Gegensatz zur Behauptung an, daß c nicht durch Z geht. Sei zunächst aZc (Fig. 16)

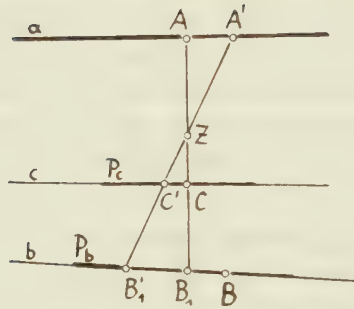


Fig. 16

Sei $C = c \cdot (A + Z)$ und $B_1 = P_b \cdot (A + Z)$. Offensichtlich gehört C zu $P_c = \{a \xrightarrow{B} c\} = \{P_b \xrightarrow{A} c\}$. Sei $B'_1 \neq B_1$ ein beliebiger Punkt von P_b und $A^1 = a \cdot (B'_1 + Z)$. Wegen aZc gilt ZCB_1 , daher existiert der Schnittpunkt $C^1 = c \cdot (Z + B'_1)$ und liegt zwischen Z und B'_1 . Aus dem Axiom von Pasch (Dreieck Z, B_1, B'_1) folgt die Existenz des Schnittpunktes $P'_b \cdot (A + C^1)$, daher gehört C^1 zu P'_c . Wir haben also gezeigt, daß das perspektive Bild $P'_c = \{P_b \xrightarrow{Z} c\}$ existiert und daß alle Punkte von P'_c zu P_c gehören. Dies gilt für die Pappusgerade c zu beliebigen Punkten $A \in a$ und $B \in P_b$, sofern c zwischen Z und P_b liegt. Nach Hilfssatz 7 gibt es nun auf P_b einen Punkt B_2 so, daß a von $C + B_2$ nicht getroffen wird. (Fig. 17).

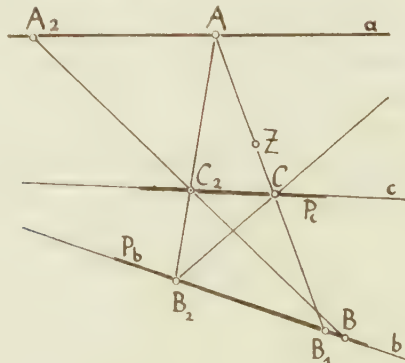


Fig. 17

Sei $C_2 = c. (A + B_2)$ und $A_2 = a. (B + C_2)$. Da c die Pappusgerade zu A und B ist, existieren diese Punkte. Es ergibt sich, daß c auch die Pappusgerade zu $A_2 \in a$ und $B_2 \in P_b$ ist; denn anderenfalls erhielten wir einen Widerspruch zu Hilfssatz 5. Somit existieren die perspektiven Bilder $P_{c,2} = \left\{ a \xrightarrow{B_2} c \right\}$ und $P'_{c,2} = \left\{ P_b \xrightarrow{A_2} c \right\}$ und es ist $P_{c,2} = P'_{c,2}$. Hier gehört aber $C \in P'_c$ nicht zu $P_{c,2} = P'_{c,2}$, im Widerspruch zu obigem Ergebnis.

Daher ist aZc unmöglich. Analog läßt sich für acZ ein Widerspruch konstruieren.

Satz 3 ist somit bewiesen.

3. Die linearen Kongruenzaxiome von D. Hilbert

Der nun folgende Satz 4 gibt uns, wie bereits erwähnt, die Möglichkeit, die noch fehlenden Eigenschaften des Kongruenzbegriffes herzuleiten.

Satz 4: zu zwei Punkten A_1 und A_2 einer Geraden a gibt es stets eine kongruente Abbildung von a auf sich, die A_1 in A_2 und A_2 in A_1 überführt.

Beweis: sei Z ein nicht auf a liegender Punkt.

Nach Hilfssatz 2 gibt es eine Gerade b so, daß Z zwischen a und b liegt und daß das perspektive Bild $P_b = \left\{ a \xrightarrow{Z} b \right\}$ existiert. Sei $B_1 = b. (Z + A_1)$ und $B_2 = b. (Z + A_2)$ (Fig. 18).

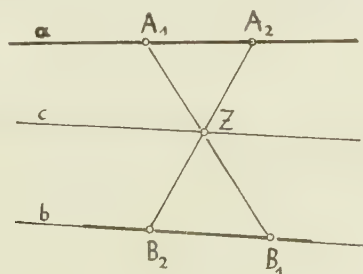


Fig. 18

Nach Hilfssatz 6 gibt es eine Pappusgerade c mit $\left\{ a \xrightarrow{B_1} c \right\} = \left\{ P_b \xrightarrow{A_2} c \right\} = P_c$; nach Satz 3 geht c durch Z .

Durch Hintereinanderausführung der drei Perspektivitäten

$a \xrightarrow{Z} P_b \xrightarrow{A_2} P_c \xrightarrow{B_1} a$ erhalten wir eine kongruente Abbildung von a auf sich, bei der A_1 in A_2 und A_2 in A_1 übergeht.

Nun lassen sich leicht Eindeutigkeit der Konstruktion kongruenter Punktepaare (Satz 5) und ihre Addierbarkeit (Satz 6) nachweisen.

Satz 5: seien a und b zwei (nicht notwendig verschiedene) Geraden mit den Punkten $A_1, A_2 \in a$ und $B_1 \in b$. Dann gibt es auf b genau zwei Punkte B_2, B'_2 mit $B_2B_1B'_2$, für die $B_1B_2 = A_1A_2$ und $B_1B'_2 = A_1A_2$ ist.

Beweis: wegen Satz 2 gibt es genau zwei kongruente Abbildungen k und k' von a auf b , die A_1 in B_1 überführen; für $B_2 = k(A_2)$ und $B'_2 = k'(A_2)$ gilt $B_2B_1B'_2$. Wir müssen nur noch zeigen, daß die beiden kongruenten Abbildungen k_1 und k'_1 mit $(a, A_2) \longrightarrow (b, B_1)$ den Punkt A_1 in B_2 bzw. B'_2 abbilden. Wir wissen wegen Satz 4, daß es eine kongruente Abbildung k_2 von b auf sich gibt, die B_1 in B_2 und B_2 in B_1 überführt. Ebenso gibt es eine kongruente Abbildung k'_2 von b auf sich, die B_1 und B'_2 vertauscht. Durch Kombination von k und k_2 bzw. von k' und k'_2 erhalten wir zwei kongruente Abbildungen mit $(a, A_2) \longrightarrow (b, B_1)$, die A_1 in B_2 bzw. in B'_2 überführen und die wegen Satz 2 mit k_1 bzw. k'_1 identisch sind.

Satz 6: seien a und b zwei Geraden mit den Punkten $A_1, A_2, A_3 \in a$ und $B_1, B_2, B_3 \in b$ und es sei $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$.

Wenn $A_1 A_2 = B_1 B_2$ und $A_2 A_3 = B_2 B_3$ ist, dann auch $A_1 A_3 = B_1 B_3$.

Beweis: wegen $A_1 A_2 = B_1 B_2$ gibt es eine kongruente Abbildung k von a auf b , die A_1 in B_1 und A_2 in B_2 überführt; denn wenn wir eine kongruente Abbildung von a auf b haben, die A_1 in B_2 und A_2 in B_1 abbildet, können wir wegen Satz 4 eine Abbildung von b auf sich, die B_1 und B_2 vertauscht, daran ausschließen und erhalten die gewünschte Abbildung k . Analog sei k' eine kongruente Abbildung von a auf b , die A_2 in B_2 und A_3 in B_3 überführt. Wir stellen fest, daß k und k' den Punkt A_2 in B_2 abbilden. Wenn $k(A_3) = B_3$ gezeigt werden kann, ist Satz 6 bewiesen. Da die kongruenten Abbildungen anordnungstreu sind, ist sicher $B_3' B_2 B_1$ für $B_3' = k(A_3)$. Aus $B_3' B_2 B_1$, aus $B_3 B_2 B_1$ und schließlich aus $k(A_2) = k'(A_2) = B_2$ folgt $B_3 = B_3'$ wegen Satz 2.

Damit ist nachgewiesen, daß der hier eingeführte Kongruenzbegriff den Axiomen III, 1, 2, 3 genügt, die D. Hilbert in den "Grundlagen der Geometrie" angegeben hat.

IV DIE UNABHÄNGIGKEIT DER AXIOME UND IHRE REALISIERBARKEIT

1. Unabhängigkeit

Wir geben nun für jedes unserer acht Axiome ein Modell an, in dem alle Axiome außer dem betreffenden erfüllt sind, dessen Unabhängigkeit von den übrigen daraus folgt.

Zu A I: Es sei eine beliebige Punktmenge mit mindestens zwei Punkten und eine leere Menge von Geraden gegeben. Außer A III sind alle anderen Axiome leere Aussagen und somit erfüllt, A III gilt selbstverständlich.¹³⁾

Zu A II: Das Modell bestehe aus einer Klein'schen hyperbolischen Ebene und einer außerhalb liegenden Geraden ohne Punkte. Daß hier A II nicht gilt, ist klar, daß dagegen die anderen erfüllt sind, bedarf höchstens für A VII einer Erläuterung. Dazu müssen wir nachweisen, daß es zu zwei Geraden a, a' mit den Punkten $A \in a, A' \in a'$ stets zwei kongruente Abbildungen mit $(a, A) \longrightarrow (a', A')$ gibt. Für punktfremde Geraden a, a' vermitteln die zwei über die Pappusgerade definierten Perspektivitäten, die in der Einführung (Fig. 1) betrachtet wurden, eine der gesuchten kongruenten Abbildungen. Eine zweite erhalten wir durch folgende Überlegungen: sei c eine solche Gerade, daß a zwischen a' und c liegt. Die Geraden a und c besitzen zwei gemeinsame Parallelen, die sich zwischen a und c schneiden (Fig. 19); sei Z ihr Schnittpunkt und $C = c \cdot (A + Z)$. Auch zu $C \in c$ und $A' \in a'$ gibt es eine Pappusgerade, durch die eine kongruente Abbildung mit $(c, C) \longrightarrow (a', A')$ erklärt werden kann.

¹³⁾ Dieses Modell wurde aus (1) übernommen.

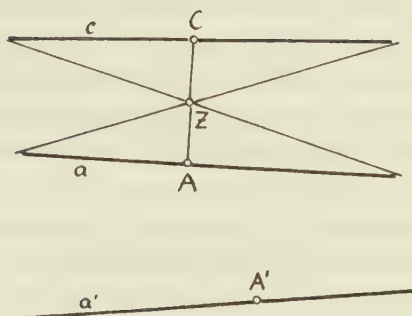


Fig. 19

Da auch die Projektion von a über Z auf c eine kongruente Abbildung ist, erhalten wir insgesamt eine kongruente Abbildung mit $(a, A) \longrightarrow (a', A')$, von der man sich leicht überzeugt, daß sie mit der ersten nicht übereinstimmt. Für nicht punktfremde Geraden a, a' sei d eine Gerade, die weder a noch a' trifft. Eine solche Gerade gibt es im Klein'schen Modell stets. Über d erhält man sofort die zwei gesuchten kongruenten Abbildungen.

Zu A III : In einem Modell das nur aus einer Geraden besteht, die genau einen Punkt enthält, gelten alle Axiome außer A III.

Zu A IV : Unsere Axiome gelten stets für die Punkte und Geradenstücke im Inneren einer Ellipse der reellen projektiven Ebene. Sie gelten aber auch im Inneren eines beliebigen offenen, beschränkten, konvexen Bereiches der reellen Ebene, zum Beispiel in einem offenen Rechteck.

Daß in einem solchen Modell A I bis A VI und A VIII gelten, ist offensichtlich. Daß auch A VII erfüllt ist, läßt sich ähnlich wie beim Beweis der Unabhängigkeit von A II zeigen. Für punktfremde Geraden lassen sich die zwei kongruenten Abbildungen wie dort konstruieren, zu nicht punktfremden Geraden a, a' gibt es nicht immer eine Gerade d , die weder a noch a' trifft; zu den beiden Diagonalen gibt es keine solche Gerade. In diesem Falle sei d eine Gerade, die a nicht trifft (Fig. 20).

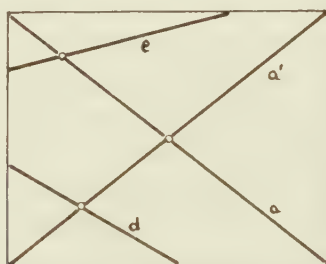


Fig. 20

Zu d und a' gibt es aber sicher eine Gerade e , die weder d noch a' trifft. Von a über d und e auf a' können wir dann wieder die gesuchten kongruenten Abbildungen konstruieren.

Wenn wir dagegen statt der reellen projektiven Ebene eine Ebene über einem beliebigen angeordneten Körper betrachten, gilt A IV nicht immer, wie wir mit dem folgenden Beispiel zeigen werden.

Wir betrachten den Körper K der rationalen Funktionen eines Parameters t mit reellen Koeffizienten. Dieser Körper besitzt bekanntlich eine Anordnung: ein Element u heißt größer als Null, wenn die rationale Funktion u von t für hinreichend große Werte von t beständig positiv ist. Entsprechend werden die negativen Elemente erklärt. Endlich heißt u größer als v , wenn $u - v$ größer als Null ist. Die Anordnung ist nicht-archimedisch. In der Ebene über diesem Körper nehmen wir das folgende Quadrat als Modell zum Beweis der Unabhängigkeit des Axioms A IV von den anderen :

$-t^2 < x < t^2$, $-t^2 < y < t^2$ für die rationalen Funktionen $x(t)$, $y(t)$. Im Inneren dieses Quadrates gelten sicher die Axiome A I - A III, A V - A VIII; A VII gilt, wie wir bereits gezeigt haben, A VIII folgt daraus, daß der Satz von Pappus in der vollen Ebene gilt. Wir geben nun einen konvexen, offenen Teilbereich $\mathcal{L}$ an, in dem A IV nicht gilt: $\mathcal{L}$ sei die Menge der Punkte (x, y) mit $x^2 < t$, $-t^2 < y < t^2$ für die rationalen Funktionen $x(t)$, $y(t)$. Sei a die Gerade $y = x$ und b die Gerade $y = \frac{t+1}{t} x$. Ihr Schnittpunkt, der Nullpunkt, gehört zu $\mathcal{L}$ (Fig. 21),

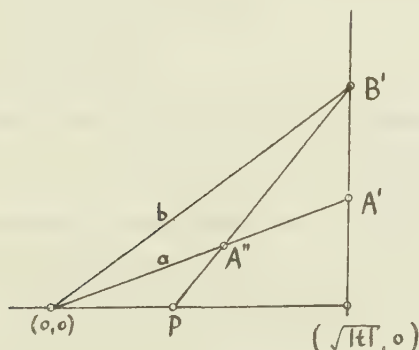


Fig. 21

ebenso wie der Punkt $P = (1, 0)$.

Seien A^1 und B^1 die nicht zum Modell gehörenden Punkte $(\sqrt{|t|}, \sqrt{|t|})$ ¹⁴⁾ bzw. $(\sqrt{|t|}, \sqrt{\frac{t+1}{|t|}})$ und A'' der ebenfalls nicht zum Modell gehörende - Schnittpunkt a . $(P + B^1)$, A'' besitzt die Koordinaten $(\sqrt{|t|} - 1, \sqrt{|t|} - 1)$. Wir behaupten nun, daß es durch P keine zum Modell gehörende Gerade gibt, die - soweit sie in $\mathcal{L}$ verläuft - a trifft, aber nicht b .

Wenn eine solche Gerade existierte, träfe sie a in einem zwischen A'' und A^1 liegenden Punkt. Da es aber keine zwischen $\sqrt{|t|} - 1$ und $\sqrt{|t|}$ liegende¹⁵⁾ rationale Funktion von t gibt, wie wir sogleich zeigen werden, gibt es keine solche Gerade, A IV gilt also nicht.

Wir führen den Beweis, indem wir die Annahme, es gebe eine zwischen $\sqrt{|t|} - 1$ und $\sqrt{|t|}$ liegende rationale Funktion von t , zu einem Widerspruch führen:

seien $P(t)$ und $Q(t)$ zwei Polynome, für die

$$\sqrt{|t|} - 1 < \frac{P(t)}{Q(t)} < \sqrt{|t|} \quad \text{gilt.}$$

Durch Quadrieren und Umformen erhalten wir die Doppelungleichung

$$1 < (|t| + 1 - \frac{P^2}{Q^2})^2 < 2|t|$$

und daraus durch nochmaliges Quadrieren die Ungleichung

14) Hier und im folgenden sei stets die positive Wurzel gemeint.

15) Auch die Funktionen von t , die man mit den vier rationalen Operationen und der Operation $\sqrt{|w|}$ erhält, wobei w eine mittels dieser fünf Operationen bereits aus t hervorgegangene Funktion bedeuten soll, bilden einen Körper, in dem dieselbe Anordnung erklärt werden kann, da auch die algebraischen Funktionen von t höchstens endlich viele Nullstellen besitzen und für hinreichend große t -Werte beständig positiv oder beständig negativ sind.

$$(t^2 + 1) Q^4 + P^4 < 2 P^2 Q^2 (1 + |t|).$$

Sei m der Grad von $P(t)$ und n der Grad von $Q(t)$.

Sei ferner r der Grad der linken Seite obiger Ungleichung und s der Grad der rechten Seite. Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} r &= \max(4m, 4n + 2), \\ s &= 2m + 2n + 1 \quad \text{und} \\ r &= s. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die folgenden drei Fälle :

1. Fall : $4m > 4n + 2$. Daraus folgt

$$2m > 2n + 1 \quad \text{und}$$

$$r \doteq 4m = 2m + 2m > 2m + 2n + 1 = s$$

im Widerspruch zu obigem Ergebnis.

2. Fall : $4m < 4n + 2$. Daraus folgt

$$2n + 1 > 2m \quad \text{und}$$

$$r = 4n + 2 = 2n + 1 + 2n + 1 > 2m + 2n + 1 = s,$$

ebenfalls im Widerspruch zu oben.

3. Fall : $4m = 4n + 2$ ist unmöglich, da $4m$ durch 4 teilbar ist, $4n + 2$ dagegen nicht.

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

In diesem Modell gaben wir $\mathcal{L}$ mit den bei der Formulierung von A IV gewählten Bezeichnungen $\mathcal{M}$ einen Bereich $\mathcal{L}$ mit $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ an, in dem A IV nicht gilt. Dagegen gilt hier A IV, wenn wir $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ wählen, für $\mathcal{L}$ also das oben angegebene offene Quadrat nehmen; denn da jede Gerade des Modells die Peripherie des Quadrates in zwei Punkten trifft,

die zwar nicht zu $\mathcal{M}$ gehören, deren Koordinaten aber rationale Funktionen von t sind, also zu $\mathcal{K}$ gehören (Fig. 22),

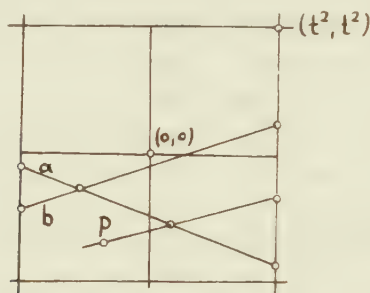


Fig. 22

läßt sich über einen zwischen zwei solchen Randpunkten liegenden Punkt leicht A IV verifizieren,

Zu A V : das Modell sei das Innere einer Ellipse der reellen Ebene, aus dem ein Punkt Z entfernt ist. Seien A, B, C drei Punkte einer nicht durch Z gehenden Geraden aus der Ellipse, und B möge im üblichen Sinne zwischen A und C liegen. Offensichtlich gibt es zwei sich schneidende Geraden a, b durch A bzw. B und eine Gerade c durch C , die weder a noch b trifft, und zwei sich schneidende Geraden b', c' durch B bzw. C und eine Gerade a' durch A , die weder b' noch c' trifft, so daß also im Sinne von Definition 1 weder BAC noch BCA gilt.

Nun sei $b'' = B + Z$ und $c'' = C + Z$, so daß sich b'' und c'' in unserem Modell nicht schneiden,

Sicher gibt es durch A eine Gerade a'' , die c'' trifft, aber nicht b'' , womit gezeigt ist, daß im Sinne von Definition D1 auch ABC nicht gilt. Daher ist $A V$ nicht erfüllt, während alle anderen Axiome gelten. 16)

Zu A VI : In einer offenen Halbebene der reellen euklidischen Ebene gelten alle Axiome außer $A VI$, da es zu einer Parallelen zur begrenzenden Geraden durch jeden Punkt stets nur eine nicht schneidende Gerade gibt.

Zu A VII : Das folgende Modell stammt nach M. L. Tomber (5) von R. Baer, von dem es als Beispiel für eine hyperbolische Geometrie angegeben wurde, in dem es keine Parallelen gibt. Es besteht aus den Punkten (x, y) mit rationalen x und y , soweit sie im Inneren der Ellipse $2x^2 + 3y^2 = 1$ liegen, und den Geraden $y = mx + n$ und $x = r$ mit rationalen m, n und r , soweit sie im Inneren der Ellipse verlaufen. Sei a die Gerade $x = 0$, a' die Gerade $x = \frac{1}{2}$, $A = (0, 0)$ und $A' = (\frac{1}{2}, 0)$. Wir zeigen nun, daß es höchstens eine kongruente Abbildung mit $(a, A) \longrightarrow (a', A')$ gibt. Die Pappusgerade zu $A \in a$ und $A' \in a'$ gehört nicht zum Modell, wie sich leicht nachprüfen läßt, so daß also die eine der beiden in den anderen Modellen konstruierten kongruenten Abbildungen nicht existiert. Da es in diesem Modell höchstens zwei kongruente Abbildungen mit $(a, A) \longrightarrow (a', A')$ gibt, wie sich aus dem zweiten Teil des Beweises zu Satz 2 ergibt, folgt sofort, daß unsere Behauptung richtig ist;

16) Dieses Modell stammt aus (1)

A VII ist nicht erfüllt, während die anderen Axiome gelten.

Zu A VIII: In einem konvexen, offenen Bereich der Moulton-Ebene, der die x-Achse enthält, gelten A I bis A VII, während A VIII nicht erfüllt ist.

2. Realisierbarkeit und Widerspruchsfreiheit

Wir stellen nun die Frage nach der Widerspruchsfreiheit der Axiome und nach ihrer Realisierbarkeit in einem Modell oder besser noch in einer Klasse von Modellen.

Die Modelle, mit denen wir die Unabhängigkeit der Axiome bewiesen, zeigen, daß die Axiome A I bis A III, A VI und A VIII für die Punkte und Geradenstücke eines beliebigen konvexen, beschränkten, offenen Bereiches einer Ebene über einem beliebigen angeordneten Körper gelten. Daß in jedem derartigen Modell auch A V gilt, ist leicht einzusehen: seien A, B, C drei kollineare Punkte aus dem Modell, von denen stets einer, etwa B , im Sinne der für den Körper geltenden Anordnung zwischen den beiden anderen liegt, seien a, b, c drei beliebige Geraden des Modells (also Geradenstücke der affinen Ebene) durch A bzw. B bzw. C , von denen sich a und c im Modell treffen, sei $D = a \cdot c$. Da in der affinen Ebene das Axiom von Pasch für die Körperanordnung gilt, trifft b entweder a zwischen A und D oder c zwischen C und D oder geht durch D ; b trifft also wenigstens eine der Geraden a und c in einem zum Modell gehörenden Punkt, d. h. B liegt auch im Sinn unserer Definition 1 zwischen A und C .

Somit gilt A V.

Um auch A IV und A VII nachweisen zu können, müssen wir weitere Voraussetzungen über den zu Grunde liegenden Körper machen, wie die beiden Modelle zeigen, die zum Nachweis der Unabhängigkeit von A IV bzw. A VII von den übrigen Axiomen konstruiert wurden:

Sei $\mathcal{K}$ ein Körper mit einer (archimedischen oder nicht-archimedischen) Anordnung und der Eigenschaft, daß jede nach oben beschränkte nicht leere Menge $M \subseteq \mathcal{K}$ eine obere Grenze in $\mathcal{K}$ besitzt. ¹⁷⁾

Für einen archimedisch geordneten Körper läßt sich diese Eigenschaft beweisen, wenn man weiß, daß jede Fundamentalfolge ¹⁸⁾ in $\mathcal{K}$ einen zu $\mathcal{K}$ gehörenden Grenzwert besitzt.

Sei $\mathcal{L}$ eine affine Ebene über $\mathcal{K}$ und M ein beliebiger beschränkter, konvexer, offener Bereich von $\mathcal{L}$. Dann gilt

Satz 7: für die zu M gehörenden Punkte von $\mathcal{L}$ und die mindestens einen Punkt von M enthaltenden Geraden von $\mathcal{L}$ gelten unsere Axiome A I bis A VIII, d. h. die so definierte Menge von Punkten und Geraden ist eine hyperbolische Ebene im Sinne unseres Axiomensystems.

Beim Beweis können wir uns auf den Nachweis der Gültigkeit von A IV und A VII beschränken, wie aus dem Obigen hervorgeht.

¹⁷⁾ Nach (9), Seite 99, folgt aus der Existenz der oberen Grenze, daß die Anordnung notwendig archimedisch ist. Das wiederum hat nach (9), Seite 100, zur Folge, daß $\mathcal{K}$ kommutativ ist. Nach P. Bernays (8) schließlich ist jeder derartige Körper dem Körper der reellen Zahlen isomorph.

¹⁸⁾ Eine Fundamentalfolge $\{a_v\}$ in einem angeordneten Körper $\mathcal{K}$ ist definiert als eine unendliche Folge $a_1, a_2, \dots$ von Elementen aus $\mathcal{K}$, für die es zu jedem positiven $\varepsilon \in \mathcal{K}$ eine natürliche Zahl $n = n(\varepsilon)$ so gibt, daß $- \varepsilon < a_p - a_q < \varepsilon$ für alle $p, q > n$ gilt. (Siehe (7), Seite 221 f)

Sei $\mathcal{M}$ wie oben ein beschränkter, konvexer, offener Bereich von $\mathcal{L}$ und sei g eine Gerade von $\mathcal{L}$, die mindestens einen Punkt von $\mathcal{M}$ enthält. Wegen der Voraussetzung über $\mathcal{M}$ bilden die zu $\mathcal{M}$ gehörenden Punkte von g eine beschränkte Menge, die nach der über den Körper $\mathcal{K}$ gemachten Voraussetzung eine obere und eine untere Grenze besitzt. Seien G_1, G_2 , die die untere bzw. obere Grenze bildenden Punkte. Da $\mathcal{M}$ offen ist, gehören G_1 und G_2 nicht zu $\mathcal{M}$, während genau die zu $\mathcal{M}$ gehörenden Punkte von g zwischen G_1 und G_2 liegen. Wir wollen G_1 und G_2 als Randpunkte von g in Bezug auf $\mathcal{M}$ bezeichnen. Nun lassen sich A IV und A VII leicht nachweisen.

Zu A IV: sei $\mathcal{L}$ ein beschränkter, offener, konvexer Bereich von $\mathcal{L}$ mit $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$. Seien a und b zwei sich in $\mathcal{L}$ schneidende Geraden und P ein Punkt aus $\mathcal{L}$, der weder auf a noch auf b liegt (Fig. 23)

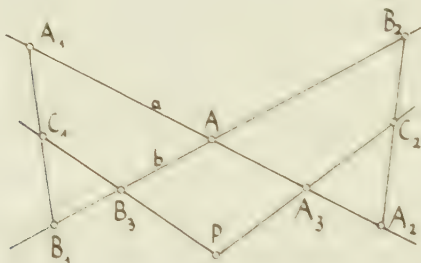


Fig. 23

sei $A = a \cdot b$. Seien A_1, A_2 die zu $\mathcal{L}$ gehörenden Randpunkte von a bezüglich $\mathcal{L}$ und B_1, B_2 die

ebenfalls zu $\mathcal{L}$ gehörenden Randpunkte von b bezüglich $\mathcal{L}$. Entweder liegt a zwischen P und B_1 oder zwischen P und B_2 . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P - a B_2$. Daraus folgt $P b A_1$. Sei C_2 ein Punkt mit $B_2 C_2 A_2$. Wegen Pasch existiert $A_3 = a \cdot (P + C_2)$ mit $A_3 A_2$, liegt also in $\mathcal{L}$, während der Schnittpunkt $b \cdot (P + C_2)$ - falls er existiert - sicher nicht zu $\mathcal{L}$ gehört. Sei C_1 ein Punkt $B_1 C_1 A_1$. Wegen Pasch existiert $B_3 = b \cdot (P + C_1)$ und liegt in $\mathcal{L}$, während der Schnittpunkt $a \cdot (P + C_1)$ - falls er existiert - sicher nicht zu $\mathcal{L}$ gehört. Damit ist A IV bewiesen.

Zu A VII: seien a und b zwei Geraden aus $\mathcal{M}$. Mit Hilfe der hier existierenden hyperbolischen Parallelen ¹⁹⁾ lassen sich zu beliebigen Punkten $A \in a$, $B \in b$ wie beim Beweis der Unabhängigkeit des Axioms A II von den anderen Axiomen zwei kongruente Abbildungen mit $(a, A) \longrightarrow (b, B)$ konstruieren. Damit ist Satz 7 bewiesen und gleichzeitig die Widerspruchsfreiheit unseres Axiomensystems gezeigt.

¹⁹⁾ Offensichtlich sind zwei Geraden, die einen Randpunkt bezüglich $\mathcal{M}$ gemeinsam haben, hyperbolisch parallel. Die Frage bleibt offen, ob in jedem Modell, das dem vorgelegten Axiomensystem genügt, eine beliebige Gerade stets hyperbolische Parallelen besitzt. Ebenso bleibt die Frage offen, ob es neben der in diesem Abschnitt betrachteten Klasse von Modellen noch weitere Modelle zu dem vorliegenden Axiomensystem gibt.

V DIE EBENE KONGRUENZ

Im letzten Kapitel der vorliegenden Arbeit wollen wir prüfen, ob sich mit unseren Voraussetzungen die Kongruenz von Winkeln und Dreiecken erklären oder beweisen läßt.

Man kann die Winkelkongruenz mit Hilfe der Kongruenz von Punktepaaren erklären, wie es zum Beispiel in (6) angegeben ist.

Jedoch müssen wir zunächst die Winkel definieren. Wir folgen dabei D. Hilbert (4) und erklären zuerst, was eine Halbgerade ist.

Definition 11: A sei ein Punkt einer Geraden a . Zwei untereinander und von A verschiedene Punkte $B, C \in a$ heißen in a auf derselben Seite von A liegend, wenn ABC oder ACB gilt. Die Menge aller Punkte von a , die auf ein und derselben Seite von A liegen, bilden eine von A ausgehende Halbgerade von a .

Es läßt sich leicht zeigen, daß A die Gerade a in genau zwei punktfremde Halbgeraden teilt und daß jede Halbgerade durch einen ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist.

Definition 12: zwei von einem Punkt A ausgehende Halbgeraden h und k , die nicht zur selben Geraden gehören, bilden einen Winkel, der mit (h, k) bezeichnet wird; A wird der Scheitel von (h, k) genannt.

Die Definition der Winkelkongruenz aus (6):

Definition 13: seien (h, k) und (h', k') zwei Winkel mit den Scheiteln A bzw. A' .

Wenn es vier Punkte $B \in h$, $C \in k$, $B' \in h'$, $C' \in k'$ so gibt, daß $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ und $BC = B'C'$ ist, werden die Winkel (h, k) und (h', k') kongruent genannt, in Zeichen $(h, k) = (h', k')$.

Wenn die Eindeutigkeit des Winkelabtrags bewiesen ist, folgt sofort das Hilbert'sche Axiom III, 5 für die Kongruenz von Dreiecken, und die gesamte Ebene Kongruenz kann eingeführt werden.

Aus unseren Axiomen folgt nicht, daß man für diesen Kongruenzbegriff von Winkeln die üblichen Eigenschaften der Winkelkongruenz herleiten kann. Zum Beispiel ist die Eindeutigkeit obiger Definition, also die Unabhängigkeit von den Punkten B, C, B', C' , nicht immer gewährleistet, wie wir an dem folgenden Modell sehen werden.

Wir betrachten die Punkte und Geraden im Inneren des Kreises $x^2 + y^2 = 16$, von dem das durch die Gerade $y = \frac{(x+4)}{\sqrt{2}-1}$ abgeschnittene Segment einschließlich des im Kreis verlaufenden Geradenstückes entfernt ist (Fig. 24).

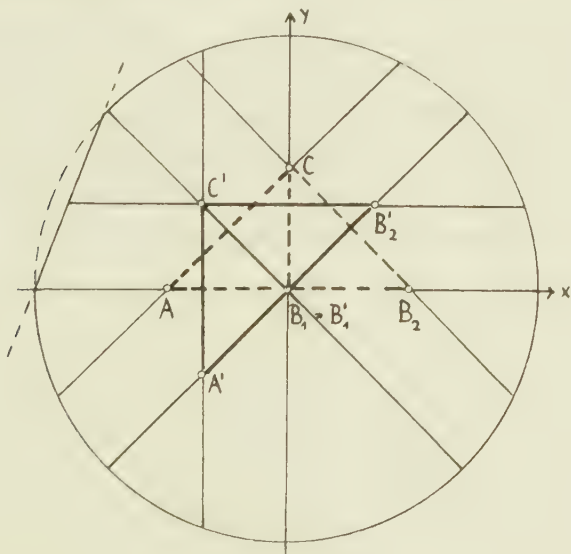


Fig. 24

Es bleibt ein konvexer, offener Bereich der euklidischen Ebene übrig, in dem unsere Axiome gelten. Es seien die Punkte $A = (-2, 0)$, $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (2, 0)$, $C = (0, 2)$, $A' = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B'_1 = (0, 0)$, $B'_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $C' = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ gegeben und es seien h, k die von A ausgehenden und durch B_1 bzw. C bestimmten Halbgeraden und h', k' die von A' ausgehenden und durch B'_1 bzw. C' bestimmten Halbgeraden. Wegen der günstig gewählten Lage der Punkte sieht man sofort, daß $AB_1 = A'B'_1$, $AC = A'C'$ und $B_1C = B'_1C'$ ist, so daß also nach Definition 13 die Winkel (h, k) und (h', k') kongruent sind. Ebenso ist $AB_2 = A'B'_2$, während $B_2C \neq B'_2C'$ ist, da die Gerade $B'_2 + C'$ als einzige der beteiligten Geraden die zur Geraden $y = \frac{(x+4)}{\sqrt{2}-1}$ gehörende Sehne trifft. Somit sind die Winkel (h, k) und (h', k') nicht kongruent, wenn man die Punkte A, B_2, C und A', B'_2, C' zur Definition heranzieht, während sie für A, B_1, C und A', B'_1, C' kongruent sind. Die Winkel sind daher nicht eindeutig konstruierbar, d. h. unser Axiomensystem reicht nicht aus.

LITERATUR - VERZEICHNIS

- (1) H.F. De Baggis: " A Theory of Order".
Rep. Math. Coll. 2 ser. 7 (1946) ,S. 3 - 14
- (2) F.P. Jenks: " A Set of Postulates for
Bolyai-Lobatchevsky Geometry. "
Proc. Nat. Acad. Sci. 26 (1940), S. 277 - 279
- (3) K. Menger: " New Projective Definitions
of the Concepts of Hyperbolic Geometry. "
Rep. Math. Coll. 2 ser. 7 (1946), S. 20 - 28
- (4) D. Hilbert: "Grundlagen der Geometrie".
- (5) M. L. Tomber: "On Perpendicularity in
Rational Hyperbolic Planes".
Rep. Math. Coll. 2 ser. 7 (1946) , S. 15 - 19
- (6) Borsuk-Szmielew: "Foundations of Geometry".
Amsterdam 1960
- (7) B.L. van der Waerden: "Moderne Algebra", I.
- (8) P. Bernays: "Betrachtungen über das Vollständig-
keitsaxiom und verwandte Axiome".
Math. Zeitschr. Bd. 63 (1955), S. 219 - 229
- (9) H. Lenz: "Grundlagen der Elementarmathematik".

L e b e n s l a u f

Ich, Dieter Dippel, wurde am 17. März 1935 zu Nordhausen im Harz als Sohn des Bundesbahnbeamten Heinrich Dippel und seiner Frau Edith, geb. Frederking, geboren.

Mehrmalige Versetzungen meines Vaters brachten uns unter anderem nach Kassel, wo ich die Volksschule und die höhere Schule bis zur Untersekunda besuchte, und nach Frankfurt/Main, wo ich im März 1954 die Reifeprüfung ablegte und vom Sommersemester 1954 bis zum Wintersemester 1960/61 Mathematik und Physik studierte. Im November 1960 bestand ich die Diplomprüfung für Mathematiker an der Universität Frankfurt.

Seit Februar 1961 bin ich berufstätig. Ich war zuerst wissenschaftlicher Angestellter am Volkswirtschaftlichen Institut der Universität München und bin seit April 1962 als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei dem Deutschen Rechenzentrum in Darmstadt angestellt.

Ich bin Herrn Prof. Dr. E. Preiser, Ordinarius für Volkswirtschaftslehre an der Universität München, und Herrn Dr. E. Glowatzki, Direktor des Deutschen Rechenzentrums in Darmstadt, zu Dank verpflichtet dafür, daß sie es mir ermöglicht haben, neben meiner beruflichen Tätigkeit an meiner Dissertation zu arbeiten.

Zu besonderem Dank bin ich meinem akademischen Lehrer, Frau Prof. Dr. R. Moufang, Ordinarius für Mathematik an der Universität Frankfurt, für die Anregung zu meiner Dissertation und für wertvolle Ratschläge bei der Abfassung der Arbeit verpflichtet.

Pfungstadt, im Oktober 1963

